**Мр Радоје Павловић\*** UDK 514.112.3

Висока школа струковних студија за васпитаче Стручни чланак и пословне менаџере „Сирмијум“, Примљен: 24. X 2013. Сремска Митровица, Република Србија

###### Др Алекса Мацановић

Интернацинални универзитет, Брчко дистрикт БиХ

###### АНАЛИТИЧКИ ДОКАЗ И УОПШТЕЊЕ ЧЕВИЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ

**САЖЕТАК**: Термин „чевијане“ долази од имена Ђованија Чевија, италијанског математи- чара, који је 1678. године објавио корисну и често коришћену теорему. Уопштене чевијане неког троугла су праве које пролазе кроз темена тог троугла .

**КЉУЧНЕ РЕЧИ**: дуж, чевијана, конгруентност, тежишна дуж.

###### Увод

Дефиниција 1. Дуж која спаја теме троугла с неком тачком на супротној страни називамо чевијанoм.

## P

А

**N**

B M C

Слика 1. дужи **AM, BN**, и **CP** су чевијане троугла **ABC**

Дефиниција 2. (Конгруентне чевијане) − термин „чевијане“ долази од имена Ђова- нија Чевија, италијанског математичара, који је 1678. године објавио следећу корисну и често коришћену теорему: Ако су три чевијане **AM, BN**, и **CP** троугла **ABC** конкурентне, тада је

# \* \* 1

*BM*

*MC*

*CN*

*NA*

*AP*

*PB*

* vs.radoje**.**pavlovic@gmail.com

Дeфиниција 3. Уопштене чевијане неког троугла су праве које пролазе кроз темена тог троугла (слика 2).

## A

**P**

**N**

#### M

**B C**

Слика 2.

Када кажемо да је скуп правих или дужи конкурентан имамо у виду да све фигуре тог скупа пролазе кроз једну тачку.

Нека су **M, N** и **P** пресечне тачке уопштених чевијана са наспрамним страницама и

нека је

*AP*

*PB*

** 1 **,**

*BM*

*MC*

** 2 и

*CN*

*NA*

 ** 3

( *i*

могу бити и негативни бројеви различити од -1 ).

Узмимо да је

** 1 ** 2 ** 3 0

и да ниједан пар уопштених чевијана није парале-

лан. Јасно је да се уопштене чевијане могу сећи у једној тачки (слика 3), али не морају (слика 2).

## A

**P**

**N**

**O**

**B M C**

Слика 3.

28

###### Аналитички доказ Чевијеве теореме

Поставља се питање потребног и довољног услова да би се уопштене чевијане секле у једној тачки.

Поставимо троугао ABC у координатни систем као на слици 4.

*A**x*1 , *y*1 

**P**

**N**

**O**

*B*0,0

М

*C**x*3 ,0

Слика 4.

Уз услов да је

** 1 **,**

** 2 и

 ** 3

#### координате тачака **M, N**, и **P** су :

*BM*

*MC*

*CN*

*NA*

*AP*

*PB*

*M*  ** 1 *x* 3

, * x* *x*

* y* 

1 **

, 0 

*N*  2 1

3 , 2

1  и  *x*

*y* .

 1 

 1**2

1 **2 

*P* 1 ,

1 

Једначине правих **AM, BN** и **CP** су:

1 **3

1 **3 

*AM* *Y* 

*y*11 **1 

\* *X*

*x*1 *y*1

**1*x*3 *x*1 **1*x*1

*BN* *Y* 

*y* 2 *y* 1 \* *X*

*CP* *Y* 

** 2 *x*1 *x* 3

*y*1

*X* 

*x*3 .

*x*1 *x*3

**3 *x*3

29

Нека се праве **BN** и **CP** секу у тачки **О**. Решавајући одговарајући систем добије се да су координате тачке

 * x* *x*

* y* 

*O* 2 1 3 , 2 1 

1**2 **2 **3

1**2 **2 ** 3 

Ако је правих).

1 **2 **2 **3 0

праве BN и CP су паралелне (услов паралелности

Одговарајућа израчунавања координата тачака **M, N**, **P** и **O** и налажење једначина правих **AM, BN** и **CP** препушта се читаоцу као својеврсна вежба стрпљења и прецизности.

Тачка **О** припада правој **АМ** ако и само ако координате тачке **О** задовољавају јед- начину праве **МN** , тј ако и само ако је

** 2 *y* 1

1

* + *y* 

*y* 1 (1 

** 1 )

 ** 2 *x* 1 *x* 3 

1 ** 2

** 3

** 1 *x* 3 *x* 1

** 1 *x* 1

#### \* 1 **

** 2 ** 3

*x* 1 

#### 

Сређивањем добијемо еквивалентну једнакост



2

#### 1 

** 3 ** 3 

1 

** 1 \*

*x* 3 

*x* 1 

** 2 ** 3 *x* 1 

и отуда је

** 1 *x* 3 

*x* 1 

** 1 *x* 1

** 1 **

2 ** 3

1 .

То је уједно доказ Чевијеве теореме (где је

**1  0 ,

**2  0

и **3  0 ) и изве-

сно уопштење за негативне бројеве

**1 , **2 и

**3 за које тачке **M , N** и **Р** нису на стра-

ницама троугла већ у општем случају на правама **ВС , СА** и **АВ**.

У случају тежишних дужи имамо да је

3

**1 ** 2

**3

1 а у случају симетрала

углова је ** 1 

*c* , ** *a*

*b* 2 *c*

и **  *b a*

што задовољава услов да је

**1 **

2 ** 3

1 .

###### 2. Уопштење Чевијеве теореме

Да размотримо могућност даљег уопштавања претходног резултата. Узмимо да

тачке и деле дужи **ВС, СА** и **АВ** у размери и **BN**, **BN** и **CP** и **CP** и **AM** секу у тачкама

**1 ,

*P*1 ,

**2 и **3

*P*2 и *P*3

респективно. Нека се праве **AM**

респективно (слика 5).

30

**N**

**A**

P1

**P3** P2 **P**

## M B C

Слика 5.

Израчунајмо површину троугла Δ

*P*1.*P*2 *P*3

#### При томе је

1 **1 **1**2

1 **2

**2 **3

1 **3 **3 **1

≠**0**

јер би у противном неки пар правих из скупа правих **AM, BN** и **CP** био паралелан и троу- гао **P1P2P3** не би постојао.

Слично као у претходном тексту налазимо координате тачака

* x* *x*

* y* *y* 

*M* 1 3 2 , 1 3 2 

 1 **1

1 **1 

#### ,

* x* *x*

* y* *y* 

*N* 2 1 3 , 2 1 3 

 1 ** 2

1 ** 2 

* x* *x*

* y* *y* ,

*P* 3 2 1 , 3 2 1 

 1 ** 3

1 ** 3 

** **

*x* *x* 

,

*  y* 

*P* 1 2 1 3

 1 2 1 

1 1 



**1 

**1 ** 2

,

1 **1

**1 ** 2  ,

*P* * x* *x*

 * y* 

2 

##### 1 

2 1

** 2 

3

** 2 ** 3

, 2

1 ** 2 

1

** 2 ** 3  ,



*P* *  x* *x*



 *y* 

1 3

3 

1



**

 3

3 1

** 3 **1

,

1 ** 3

1

** 3 **1 

#### .

31

Површина троугла

*P*1 *P*2 *P*3 је

1

*xP*

1

*y*

*P*

1

*xP*

2

*yP*

2

*xP*

1

1

1

3

*yP*

3

*P*

*P*1*P*2 *P*3 2

1 *  *

12

 *x y* \* 

1 1 2 

1 2 3

2

2 3 

3 3 1 

2 3 1

1 **

* *

1 **

* *

1 **

* * .

#### Пошто је

1

* *x*3 *y*1

*P*

# 2

  *ABC*

#### имамо да је

*P*  **1**2 **3 1

2

 *P*1 *P*2 *P*3

1 **

* *

1 **

* *

1 **

* *

\* *P**ABC* .

1 1 2

2 2 3

3 3 1

Површина троугла

*P*1 *P*2 *P*3

је једнака 0 ако и само ако је

** 1 **

2 ** 3

1 и као директну последицу тог тврђења добијамо Чевијеву теорему.

**ЛИТЕРАТУРА**

Васильев, Н. Б., Егоров, А. А. (1988). *Задачи всесоюзных математических олимпиад*. Москва:

,,Наука”.

Прасолов. В. В. (2003). *Задачи по планиметрии*. Москва: МЦНМО. Прасолов, В. В., Тихомиров, В. М. (2007). *Геометрия*. Москва: МЦНМО. Coxeter, H.S.M., Greitzer, S.L. (1967). *Geometry revisited*. Toronto, New York.

**Radoje Pavlović, M.Sc. Aleksa Macanović, Ph.D.**

**ANALYTICAL EVIDENCE AND GENERALIZATION IN CEVA'S THEOREM**

***Summary***

The name “cevian” comes from Giovanni Ceva, an Italian mathematician, who first published the theorem in 1678, which proved to be a useful and frequently used theorem. General Cevian approach is a right triangle pas- sing through the apex of the triangle.

*Key words*: a straight line, cevian, congruency, centroidal axis.

32