Kornelija Ristić, master*
Jovana Jović, dipl. ing.
Republička uprava za geodetske i
imovinsko pravne poslove, Banja Luka,
Republika Srpska

UDK 528.06
Originalni naučni rad

PELCEROVA METODA

SAŽETAK: Usljed promjena na tlu (klizišta ili pomjeranje zemljine kore), u toku građenja ili eksploatacije objekta dolazi do promjena u konstrukciji objekta i njenoj okolini, tj. do deformacije objekta čime se narušava njegova stabilnost. U radu je dat praktičan primjer ispitivanja stabilnosti stambenog objekta na području grada Banja Luke, primjenom Pelcerove metode, kao jedne od metoda deformacione analize. Ova metoda je bazirana na ispitivanju podudarnosti koordinata (visina) tačaka, dobijenih izravnanjem geodetske mreže u dvije epohe mjerenja.

KLJUČNE RIJEČI: deformacije objekata, geodetske metode deformacione analize, geodetska mreža, stabilnost objekta.

1. Uvod

Krajem sedamdesetih i početkom osamdesetih godina prošlog vijeka geodetski stručnjaci iz oblasti deformacione analize bavili su se razvojem novih tehnika monitoringa i geometrijskom analizom često opažanih geodetskih deformacionih mreža. Godine 1975. u Krakovu je održan prvi FIG simpozijum o deformacionim mjerenjima. U to vrijeme glavni problem deformacione analize bio je utvrđivanje stabilnih referentnih tačaka u kontrolnim mrežama.

Cilj i svrha monitoringa objekata jeste otkrivanje eventualnih deformacija, odnosno provjera stabilnosti konstrukcije objekta kako bi konstrukcija objekta imala duži vijek trajanja. Danas se za te potrebe ulaže sve više i više novca, te se monitoring objekata i razvoj tehnika za monitoring nameće kao veoma ozbiljan problem.

Postoji više metoda ispitivanja tačaka geodetskih mreža zasnovanih na analizi mjerenja u više epoha. U zavisnosti od načina na koji tretiraju deformacije mreža, metode se mogu podijeliti na:

- Metode kongruencije (podudarnosti) – deformacije su nezavisne od proteklog vremena između epoha,
- Kinematičke metode – deformacije su u funkciji od proteklog vremena između epoha,
- Dinamičke metode – deformacije su posljedice uzročnih sila u funkciji vremena.

FIG-ina komisija za deformacionu analizu preporučila je sledeće metode za utvrđivanje nepodudarnosti tačaka:

- Pelcerova metoda ili Hanoverski postupak,
- Kasparijeva metoda,
- Metod Delft,
- Metod Karlsrue,
- Metod Velša.

* kornelija.as@gmail.com

Jedna od metoda modela kongruencije je i Pelcerova metoda ili Hanoverski postupak. Pelcerovu metodu je razvio Pelcer, a prilagodio praktičnoj primeni Niemeier. Metoda je bazirana na ispitivanju podudarnosti koordinata (visina) tačaka kontrolne mreže, dobijenih izravnanjem epoha mjerenja.

2. Pelcerova metoda – praktičan primjer

Osnovna karakteristika ove metode je testiranje globalne podudarnosti koristeći izračunato srednje neuklapanje dva puta premjerene mreže i ispitivanje da li su prisutna pomjeranja tačaka (nastala između dva pomjeranja mreže − dvije epohe).

Za potrebe monitoringa stambenog objekta na području grada Banja Luke izvršene su dvije epohe mjerenja. Rezultati mjerenja dati su u *Tabeli 2.1.*

Osnovna mreža objekta sastoji se od tri repera sa oznakama: RM1, RM2 i RM3. Na objektu su četiri repera sa oznakama: R1, R2, R3 i R4. U cilju ispitivanja stabilnosti pomenutog objekta biće primjenjena Pelcerova metoda.

Tabela 2.1. Rezultati mjerenja

Od	Do	Nulta epoha mjerenja	I-ta epoha mjerenja	Broj stanica
RM1	RM2	1.2974	1.2976	5
RM2	RM3	-0.8012	-0.8016	6
RM3	RM1	-0.4972	-0.4968	2
RM1	R1	-0.2473	-0.2471	2
RM2	R2	-1.5352	-1.5153	3
RM3	R4	-0.5448	-0.5447	2
R1	R2	0.0104	0.0306	1
R2	R3	0.0407	0.021	2
R3	R4	0.1487	0.1485	1
R4	R1	-0.1995	-0.1996	2

Standard mjerenja visinske razlike po stanici je 0.2 mm.

Svaka epoha mjerenja izravnava se nezavisno, uz pretpostavku da su opažanja oslobođena uticaja grubih i sistematskih grešaka, odnosno sadrže samo slučajne greške koje slijede normalnu raspodijelu, $\varepsilon \sim N(0,1)$. Izravnanja pojedinih epoha mjerenja obavljaju se po metodi najmanjih kvadrata (MNK), sa minimalnim tragom kofaktorske matrice nepoznatih parametara (visina repera) [1], [4] i [5]:

$$\hat{V}^T PV = \min$$

$$trag\, Q_{\hat{X}} = \min \text{ ili } d\hat{x}^T d\hat{x} = \min$$

Nakon izravnanja slijedi formiranje matrice koeficijenata težina:

$$Q_{\bar{d}} = Q_{\hat{X}_1} + Q_{\hat{X}_0}$$

$$Q_{\hat{d}} = \begin{vmatrix} 1.4456 & -0.1378 & 0.1758 & -0.0797 & -0.3876 & -0.5983 & -0.4180 \\ -0.1378 & 2.2768 & -0.2556 & -0.4144 & -0.1511 & -0.6716 & -0.6462 \\ 0.1758 & -0.2556 & 1.4752 & -0.3796 & -0.5228 & -0.4161 & -0.0770 \\ -0.0797 & -0.4144 & -0.3796 & 0.9254 & 0.2245 & -0.1799 & -0.0963 \\ -0.3876 & -0.1511 & -0.5228 & 0.2245 & 1.0338 & 0.0138 & -0.2106 \\ -0.5983 & -0.6716 & -0.4161 & -0.1799 & 0.0138 & 1.4293 & 0.4228 \\ -0.4180 & -0.6462 & -0.0770 & -0.0963 & -0.2106 & 0.4228 & 1.0252 \end{vmatrix}$$

i vektora razlika ocenjenih visina repera između dvije epohe [1], [2] i [6]:

$$\hat{d} = \hat{x}_1 - \hat{x}_0$$

$$\hat{d} = \begin{vmatrix} -2.9323 \\ -2.7168 \\ -3.1482 \\ -2.9226 \\ 17.2081 \\ -2.6136 \\ -2.8745 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \\ \text{mm} \end{matrix}$$

gdje je:

- $Q_{\hat{x}\,(0,i)}$ – kofaktorska matrica ocijenjenih nepoznatih parametara (priraštaji visina repera) za nultu (i – tu) epohu mjerenja,
- $\hat{x}_{(0,i)}$ – vektor ocijenjenih visina repera za nultu (i – tu) epohu mjerenja.

2.1. Homogena tačnost opažanja između dvije epohe

Da bismo mogli testirati podudarnost koordinata (visina) tačaka kontrolne mreže opažanja između epoha, mjerenja moraju biti homogena, odnosno iste tačnosti [3].

➢ *Testiranje hipoteze o homogenosti opažanja*

H_0: M(S_{00}^2) = M (S_{0I}^2) – nulta hipoteza o jednakosti disperzija

H_A: M(S_{00}^2) $\neq$ M(S_{0I}^2) – alternativna hipoteza o jednakosti disperzija

$$F = \frac{S_{00}^2}{S_{0I}^2} = 1.63 < F_{1-\alpha}\,(f_0, f_I) = F_{1-0.05}\,(4,4) = 6.39$$

$F_{1-\alpha}$ (f_0,f_I) – kvantil fišerove raspodjele za nivo značajnosti α=0.05 (kritična vrednost),
$f_o = n_0 - u_0 + d = 4$ – broj suvišnih mjerenja pri izravnanju nulte epohe opažanja,
$f_I = n_I - u_I + d = 4$ – broj suvišnih mjerenja pri izravnanju i-te epohe opažanja,
n – broj opažanja u mreži,
u – broj nepoznatih parametara (visine repera),
d = 1 – defekt mreže (translacija).

Kako je test statistika manja od kritične vrijednosti, odnosno kako test statistika slijedi fišerovu centralnu raspodjelu, zaključujemo da su opažanja između epoha homogena.

- *Računanje objedinjenog disperzionog faktora*

$$S^2 = \frac{f_0 S_{00}^2 + f_I S_{0I}^2}{f_0 + f_I} = 0.0388$$

2.2. Globalni test podudarnosti kontrolne mreže

Pod pojmom „podudarnost mreže“ podrazumijeva se stabilnost repera u mreži. Reper je stabilan ako je zadržao svoj položaj između dvije epohe. Visine repera između dvije epohe moraju se slagati u granicama tačnosti opažanja.

Podudarnost mreže konstatuje se odgovarajućim statističkim testovima [4]. Postavljamo nultu i alternativnu hipotezu:

$$H_0: M(\hat{d}) = 0$$
$$H_A: M(\hat{d}) \neq 0$$

gdje je: $M(\hat{d}) = M(\hat{X}_I) - M(\hat{X}_0)$.

Računamo „srednje neuklapanje“ ili rascjep:

$$\theta^2 = \frac{\hat{d}^T Q_{\hat{d}}^{+} \hat{d}}{h} = 52.44$$

gdje je:

- $h = \text{rang}(Q_{\hat{d}}) = 7$,
- $Q_{\hat{d}}^{+} = P_d$ – pseudoinverzija matrice $Q_{\hat{d}}$,odnosno matrica težina.

1.4456	-0.1378	0.1758	-0.0797	-0.3876	-0.5983	-0.4180
-0.1378	2.2768	-0.2556	-0.4144	-0.1511	-0.6716	-0.6462
0.1758	-0.2556	1.4752	-0.3796	-0.5228	-0.4161	-0.0770
-0.0797	-0.4144	-0.3796	0.9254	0.2245	-0.1799	-0.0963
-0.3876	-0.1511	-0.5228	0.2245	1.0338	0.0138	-0.2106
-0.5983	-0.6716	-0.4161	-0.1799	0.0138	1.4293	0.4228

$$\begin{vmatrix} -0.4180 & -0.6462 & -0.0770 & -0.0963 & -0.2106 & 0.4228 & 1.0252 \end{vmatrix}$$

$Q_{\hat{d}}^{+} =$

Test statistika:

$$F = \frac{\theta^2}{S^2} = 1350.97 > F_{1-\alpha}(h, f_I + f_0) = F_{1-0.05}(7.8) = 3.50$$

Kako je test statistika veća od kritične vrijednosti prihvata se alternativna hipoteza, odnosno *u mreži ima nestabilnih (značajno pomjerenih) repera.*

- *Globalni test podudarnosti osnovne mreže*

Tačke (repere) kontrolne mreže delimo na dva skupa: skup osnovnih tačaka (tačke osnovne mreže) i skup tačaka na objektu (mreža tačaka na objektu).

U cilju testiranja podudarnosti osnovne mreže podjelićemo vektor razlika ocijenjenih visina repera kontrolne mreže na dva nezavisna subvektora:

$$\hat{d} = \begin{pmatrix} \hat{d}_s \\ \hat{d}_0 \end{pmatrix},$$

gdje je:

- $\hat{d}_s$ − subvektor razlike ocijenjenih visina repera osnovne mreže,
- $\hat{d}_0$ − subvektor razlike ocijenjenih visina repera na objektu.

Matricu težina dijelimo na odgovarajuće submatrice:

$$Q_{\hat{d}}^{+} = P_{\hat{d}} = \begin{pmatrix} P_{SS} & P_{S0} \\ P_{0S} & P_{00} \end{pmatrix}.$$

$$\hat{d}^T Q_{\hat{d}} \hat{d} = \hat{d}_S^T P_{SS} \hat{d}_S + 2\hat{d}_S^T P_{S0} \hat{d}_0 + \hat{d}_0^T P_{00} \hat{d}_0$$

$$\hat{d}^T Q_{\hat{d}} \hat{d} = d_S^T \overline{P}_{SS} d_S + \overline{d}_0^T P_{00} \overline{d}_0$$

$$\overline{d}_0 = \hat{d}_0 + P_{00}^{-1} P_{0S} \hat{d}_s$$

$$\overline{P}_{SS} = P_{SS} - P_{S0} P_{00}^{-1} P_{0S}$$

$$H_0\text{: } M(\hat{d}_s) = 0$$

$$H_A\text{: } M(\hat{d}_s) \neq 0$$

$$\theta_S^2 = \frac{d_s^T \overline{P}_{SS} d_S}{h = rang(P_{SS})} = 0.02$$

$$F = \frac{\theta_S^2}{S^2} = 0.40 < F_{1-\alpha}(h_S, f_0 + f_I) = F_{1-0.05}(3,8) = 4.07$$

Kako je test statistika manja od kritične vrijednosti prihvata se nulta hipoteza, odnosno *reperi osnovne mreže su stabilni (nisu značajno pomjereni).*

- *Globalni test podudarnosti mreže repera na objektu*

$$H_0: M(\hat{d}_0) = 0$$

$$H_A: M(\hat{d}_0) \neq 0$$

S obzirom da u osnovnoj mreži nema nestabilnih repera subvektor $\hat{d}_0$ predstavlja razliku ocijenjenih visina repera na objektu između dvije epohe. U suprotnom, subvektor $\hat{d}_0$ bi se odnosio i na nestabilne repere u osnovnoj mreži, a subvektor $\hat{d}_S$ na stabilne repere u osnovnoj mreži, te bi i matrica težina P_d drugačije izgledala.

$$\theta_0^2 = \frac{\bar{d}_0^T P_{00} \bar{d}_0}{h_0 = rang(P_{00})} = 91.76$$

$$F = \frac{\theta_S^2}{S^2} = 2363.90 > F_{1-\alpha}(h_0, f_I + f_0) = F_{1-0.05}(4,8) = 3.84$$

Kako je test statistika veća od kritične vrijednosti prihvatamo alternativnu hipotezu, odnosno *postoje nestabilni (značajno pomjereni) reperi na objektu.*

- *Lokalizacija nestabilnih repera na objektu*

$$\hat{d} = \begin{pmatrix} \hat{d}_F \\ \hat{d}_B \end{pmatrix}$$

- $\hat{d}_F$ − subvektor razlike ocijenjenih visina stabilnih repera, uključujući i stabilne repere osnovne mreže,
- $\hat{d}_B$ − subvektor razlike ocijenjenih visina repera koji se uslovno smatra nestabilnim.

$$P_d = \begin{pmatrix} P_{FF} & P_{FB} \\ P_{BF} & P_{BB} \end{pmatrix}$$

$$\theta_B^2 = \frac{\bar{d}_B^T P_{BB} \bar{d}_B}{h_B}$$

$$\overline{d}_B = \hat{d}_B + P_{BB}^{-1} P_{BF} \hat{d}_F$$

Za svaki reper na objektu računamo rascjep, odnosno srednje neuklapanje θ_B^2. Reper sa najvećim rascjepom proglašavamo nestabilnim. U *Tabeli 2.2.1.* date cy vrijednosti rascjepa za pojedine repere na objektu.

Tabela 2.2.1. Vrijednosti rascjepa

Oznaka repera	θ_B^2
R1	101.5056
R2	400.3637
R3	31.0408
R4	0.0025

Posmatrajući *Tabelu 2.2.1.* zaključujemo da je pomjeren reper R2, te ga proglašavamo nestabilnim. Zatim, odgovarajućim statističkim testom provjeravamo da li ima još nestabilnih repera na objektu.

$$H_0\text{: } M(\hat{d}_F) = 0$$

$$H_A\text{: } M(\hat{d}_F) \neq 0$$

$$\theta_{REST}^2 = \frac{\overline{d}_F^T \overline{P}_{FF} \overline{d}_F}{h_F = rang(\overline{P}_{FF})} = 0.0171$$

$$\overline{P}_{FF} = P_{FF} - P_{FB} P_{BB}^{-1} P_{BF}$$

$$F = \frac{\theta_{REST}^2}{S^2} = 0.44 < F_{1-\alpha}(h_F, f_0 + f_I) = F_{1-0.05}\ (6.8) = 3.58$$

Kako je test statistika manja od kritične vrijednosti usvaja se nulta hipoteza, odnosno nema više nestabilnih repera na objektu.

3. Zaključak

Stabilnost repera provjerena je Pelcerovom metodom, koja sa zasniva na ispitivanju podudarnosti visina repera između dvije epohe. Primjenom odgovarajućih statističkih testova zaključeno je da je značajno pomjeren reper R2, odnosno da je reper R2 nestabilan. Pomjeranja ostalih repera u mreži su u dozvoljenim granicama, te se ovi reperi smatraju stabilnim.

LITERATURA

[1] Aleksić, I i Mihailović, K. (2008). *Koncepti mreža u geodetskom premeru*. Beograd: Geokarta.
[2] Ašanin, S. (2003). *Inženjerska geodezija 1*. Beograd: Ageo.
[3] Božić, B. (2008). *Teorija grešaka geodetskih merenja*. Beograd.

[4] Božić, B. (2012). *Račun izravnanja 2*. Beograd.
[5] Božić, B. (2012). *Račun izravnanja – napredni kurs*. Beograd.
[6] Gospavić, Z. i dr. (2007). *Zbirka odabranih zadataka iz inženjerske geodezije*. Beograd: Geokarta.

Kornelija Ristić, M. A.
Jovana Jović, Dipl.-Ing.

PELZER'S METHOD

Summary

Due to changes on the ground (landslides or movement of the earth's crust), during construction or exploitation of the building there is a change in the structure of the facility and its surroundings, ie. deformation of the object which is undermines its stability. This work presents a practical example of stability studies of a residential building in the city of Banja Luka using Pelzer's method as one method of strain analysis. This method is based on coordinates (height) points compatibility testing, adjustment of measurement times.

Key words: object deformations, geodetic strain analysis methods, geodetic network, stability of the structure.