**Мр Радоје Павловић***
Висока школа струковних студија за васпитаче
и пословне менаџере „Сирмијум“,
Сремска Митровица, Република Србија
**Др Алекса Мацановић**
Интернацинални универзитет, Брчко дистрикт БиХ

UDK 514.112.3
Стручни чланак
Примљен: 24. X 2013.

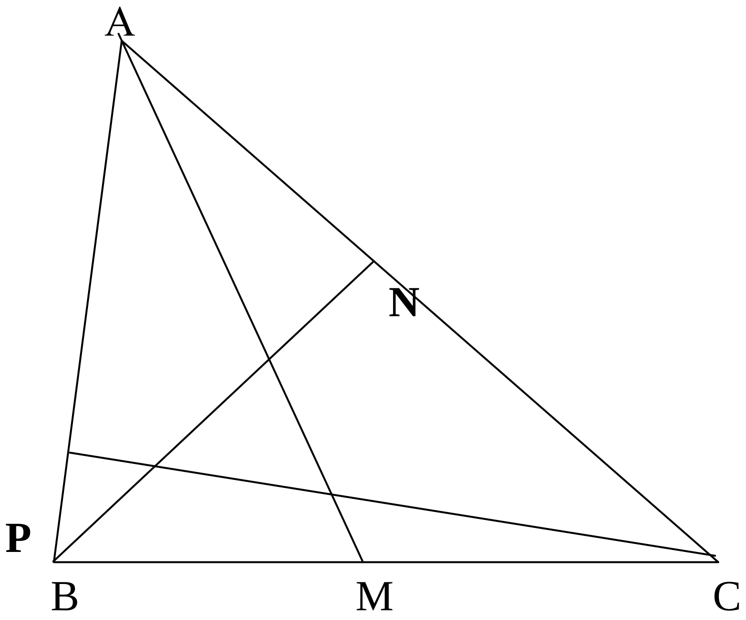
# АНАЛИТИЧКИ ДОКАЗ И УОПШТЕЊЕ ЧЕВИЈЕВЕ ТЕОРЕМЕ

**САЖЕТАК**: Термин „чевијане“ долази од имена Ђованија Чевија, италијанског математичара, који је 1678. године објавио корисну и често коришћену теорему. Уопштене чевијане неког троугла су праве које пролазе кроз темена тог троугла .

**КЉУЧНЕ РЕЧИ**: дуж, чевијана, конгруентност, тежишна дуж.

## Увод

Дефиниција 1. Дуж која спаја теме троугла с неком тачком на супротној страни називамо чевијаном.



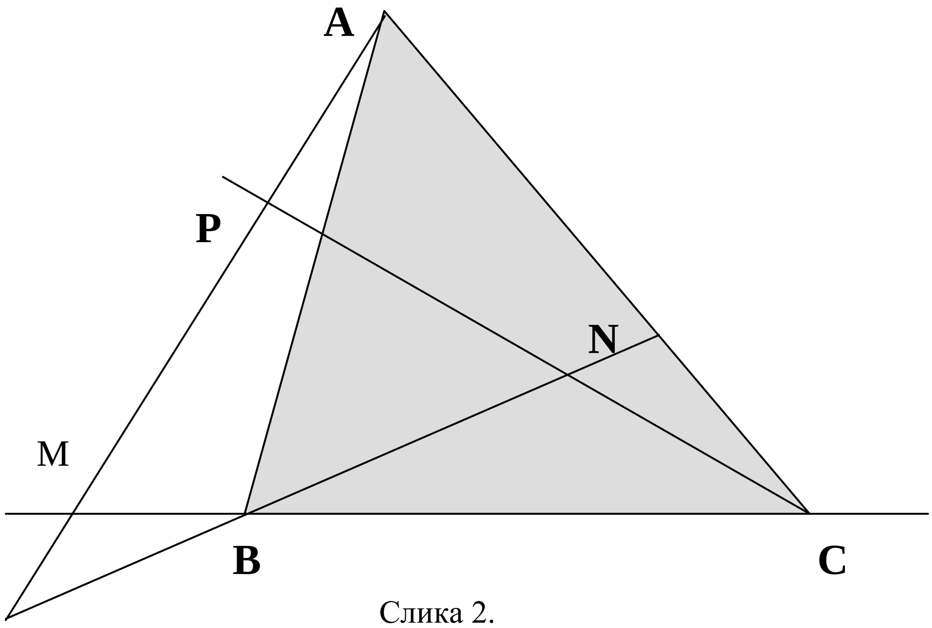

Слика 1. дужи **AM, BN**, и **CP** су чевијане троугла **ABC**

Дефиниција 2. (Конгруентне чевијане) − термин „чевијане“ долази од имена Ђованија Чевија, италијанског математичара, који је 1678. године објавио следећу корисну и често коришћену теорему: Ако су три чевијане **AM, BN**, и **CP** троугла **ABC** конкурентне, тада је

$$\frac{|BM|}{|MC|} * \frac{|CN|}{|NA|} * \frac{|AP|}{|PB|} = 1$$

* vs.radoje.pavlovic@gmail.com

Дефиниција 3. Уопштене чевијане неког троугла су праве које пролазе кроз темена тог троугла (слика 2).




Слика 2.

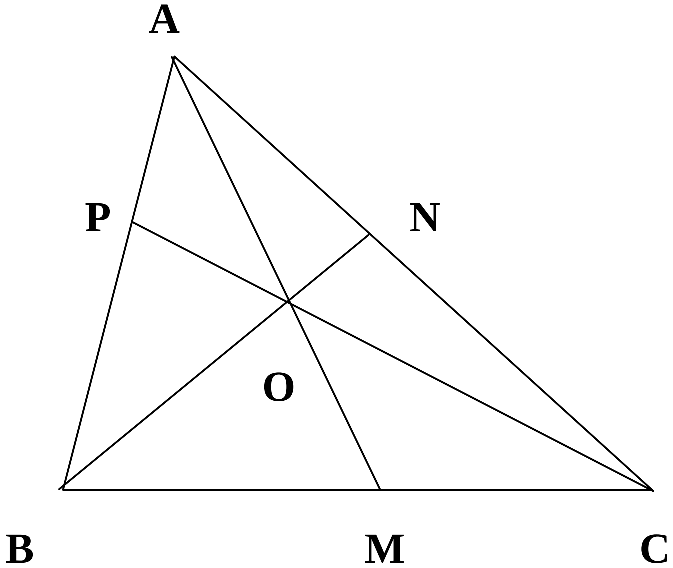
Када кажемо да је скуп правих или дужи конкурентан имамо у виду да све фигуре тог скупа пролазе кроз једну тачку.

Нека су **M, N** и **P** пресечне тачке уопштених чевијана са наспрамним страницама и нека је

$$\frac{|BM|}{|MC|} = \lambda_1, \qquad \frac{|CN|}{|NA|} = \lambda_2 \qquad \text{и} \qquad \frac{|AP|}{|PB|} = \lambda_3$$

( $\lambda_i$ могу бити и негативни бројеви различити од -1 ).

Узмимо да је $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ и да ниједан пар уопштених чевијана није паралелан. Јасно је да се уопштене чевијане могу сећи у једној тачки (слика 3), али не морају (слика 2).

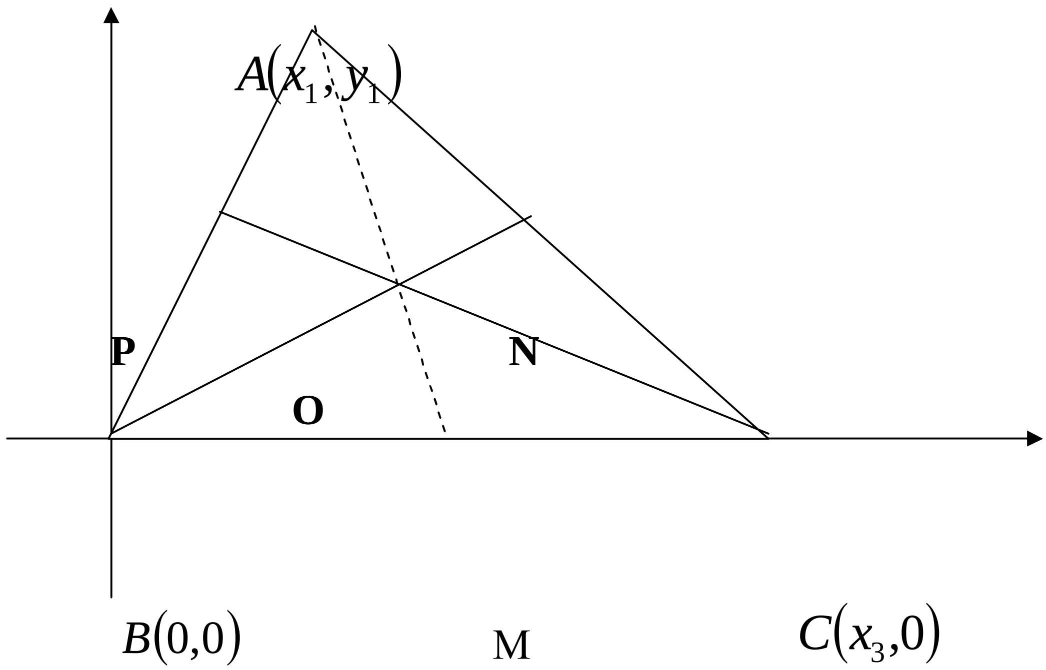



Слика 3.

## 1. Аналитички доказ Чевијеве теореме

Поставља се питање потребног и довољног услова да би се уопштене чевијане секле у једној тачки.

Поставимо троугао ABC у координатни систем као на слици 4.




Слика 4.

Уз услов да је $\dfrac{|BM|}{|MC|} = \lambda_1$, $\dfrac{|CN|}{|NA|} = \lambda_2$ и $\dfrac{|AP|}{|PB|} = \lambda_3$

координате тачака **M, N**, и **P** су :

$$M\left(\frac{\lambda_1 x_3}{1+\lambda_1}, 0\right),\ N\left(\frac{\lambda_2 x_1 + x_3}{1+\lambda_2}, \frac{\lambda_2 y_1}{1+\lambda_2}\right) \text{ и } P\left(\frac{x_1}{1+\lambda_3}, \frac{y_1}{1+\lambda_3}\right).$$

Једначине правих **AM, BN** и **CP** су:

$$AM \equiv Y = \frac{-y_1(1+\lambda_1)}{\lambda_1 x_3 - x_1 - \lambda_1 x_1} * (X - x_1) + y_1$$

$$BN \equiv Y = \frac{y_2 y_1}{\lambda_2 x_1 + x_3} * X$$

$$CP \equiv Y = \frac{y_1}{x_1 - x_3 - \lambda_3 x \lambda_3}(X - x_3).$$

Нека се праве **BN** и **CP** секу у тачки **O**. Решавајући одговарајући систем добије се да су координате тачке

$$O\left(\frac{\lambda_2 x_1 + x_3}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}, \frac{\lambda_2 y_1}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\right)$$

Ако је $1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3 = 0$ праве BN и CP су паралелне (услов паралелности правих).

Одговарајућа израчунавања координата тачака **M, N**, **P** и **O** и налажење једначина правих **AM, BN** и **CP** препушта се читаоцу као својеврсна вежба стрпљења и прецизности.

Тачка **O** припада правој **AM** ако и само ако координате тачке **O** задовољавају једначину праве **MN** , тј ако и само ако је

$$\frac{\lambda_2 y_1}{1+\lambda_2+\lambda_3} - y_1 = \frac{-y_1(1+\lambda_1)}{\lambda_1 x_3 - x_1 - \lambda_1 x_1} * \left(\frac{\lambda_2 x_1 + x_3}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3} - x_1\right)$$

Сређивањем добијемо еквивалентну једнакост

$$-1-\lambda_3\lambda_3 = \frac{(-1-\lambda_1)*(x_3 - x_1 - \lambda_2\lambda_3 x_1)}{\lambda_1 x_3 - x_1 - \lambda_1 x_1}$$

и отуда је

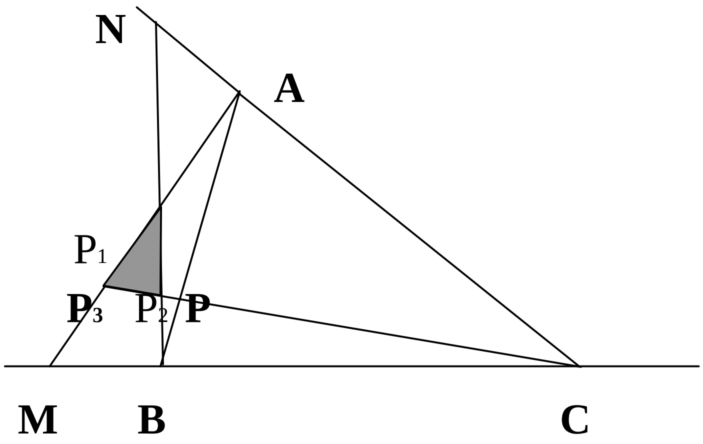
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1 .$$

То је уједно доказ Чевијеве теореме (где је $\lambda_1 \succ 0$, $\lambda_2 \succ 0$ и $\lambda_3 \succ 0$) и извесно уопштење за негативне бројеве $\lambda_1$ , $\lambda_2$ и $\lambda_3$ за које тачке **M , N** и **P** нису на страницама троугла већ у општем случају на правама **BC , CA** и **AB**.

У случају тежишних дужи имамо да је $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ а у случају симетрала углова је $\lambda_1 = \frac{c}{b}$, $\lambda_2 = \frac{a}{c}$ и $\lambda_3 = \frac{b}{a}$ што задовољава услов да је $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

## 2. Уопштење Чевијеве теореме

Да размотримо могућност даљег уопштавања претходног резултата. Узмимо да тачке и деле дужи **BC, CA** и **AB** у размери $\lambda_1$, $\lambda_2$ и $\lambda_3$ респективно. Нека се праве **AM** и **BN**, **BN** и **CP** и **CP** и **AM** секу у тачкама $P_1$, $P_2$ и $P_3$ респективно (слика 5).




Слика 5.

Израчунајмо површину троугла $\Delta \quad P_1 P_2 P_3$ При томе је

$$\left(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2\right)\left(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3\right)\left(1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1\right)\neq \mathbf{0}$$

јер би у противном неки пар правих из скупа правих **AM, BN** и **CP** био паралелан и троугао **P1P2P3** не би постојао.

Слично као у претходном тексту налазимо координате тачака

$$M\left(\frac{\lambda_1 x_3 + x_2}{1+\lambda_1}, \frac{\lambda_1 y_3 + y_2}{1+\lambda_1}\right),$$

$$N\left(\frac{\lambda_2 x_1 + x_3}{1+\lambda_2}, \frac{\lambda_2 y_1 + y_3}{1+\lambda_2}\right)$$

$$P\left(\frac{\lambda_3 x_2 + x_1}{1+\lambda_3}, \frac{\lambda_3 y_2 + y_1}{1+\lambda_3}\right),$$

,

$$P_1\left(\frac{\lambda_1\left(\lambda_2 x_1 + x_3\right)}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}, \frac{\lambda_1\lambda_2 y_1}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}\right),$$

$$P_2\left(\frac{\lambda_2 x_1 + x_3}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}, \frac{\lambda_2 y_1}{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3}\right),$$

$$P_3\left(\frac{\lambda_1\lambda_3 x_3 + x_1}{1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}, \frac{y_1}{1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}\right).$$

Површина троугла $P_1P_2P_3$ је

$$P_{\triangleright P_1P_2P_3} = \frac{1}{2} \left| \boxed{\begin{matrix} x_{P_1} & y_{P_1} & 1 \\ x_{P_2} & y_{P_2} & 1 \\ x_{P_3} & y_{P_3} & 1 \end{matrix}} \right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|-x_3y_1\right| * \frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 1)^2}{(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)(1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}.$$

Пошто је $\frac{1}{2}\left|-x_3y_1\right| = P_{\triangleright ABC}$ имамо да је

$$P_{\triangleright P_1P_2P_3} = \frac{(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 1)^2}{(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)(1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3)(1+\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)} * P_{\triangleright ABC}.$$

Површина троугла $P_1P_2P_3$ је једнака 0 ако и само ако је $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ и као директну последицу тог тврђења добијамо Чевијеву теорему.

## ЛИТЕРАТУРА

Васильев, Н. Б., Егоров, А. А. (1988). *Задачи всесоюзных математических олимпиад*. Москва: ,,Наука".
Прасолов. В. В. (2003). *Задачи по планиметрии*. Москва: МЦНМО.
Прасолов, В. В., Тихомиров, В. М. (2007). *Геометрия*. Москва: МЦНМО.
Coxeter, H.S.M., Greitzer, S.L. (1967). *Geometry revisited*. Toronto, New York.

**Radoje Pavlović, M.Sc.**
**Aleksa Macanović, Ph.D.**

**ANALYTICAL EVIDENCE AND GENERALIZATION IN CEVA'S THEOREM**

***Summary***

The name "cevian" comes from Giovanni Ceva, an Italian mathematician, who first published the theorem in 1678, which proved to be a useful and frequently used theorem. General Cevian approach is a right triangle passing through the apex of the triangle.

*Key words*: a straight line, cevian, congruency, centroidal axis.