Vesna Vujačić
Osnovna škola „Đura Jakšić“, Beograd,
Republika Srbija

UDK 514.13
Stručni članak
Primljen: 15. VI 2014.

KLAJNOV MODEL HIPERBOLIČKE GEOMETRIJE

SAŽETAK: Hiperbolički geometrijski sistem (geometrija Lobačevskog) jeste neeuklidski sistem, pošto se od Euklidskog razlikuje samo u aksiomi paralelnosti. Da bi se uverili u neprotivrečnost istog neophodno je konstruisati model te geometrije u nekoj teoriji za koju pretpostavljamo da je neprotivrečna. Najpoznatiji modeli hiperbolične geometrije su Klajnov i Poencareov.

KLJUČNE REČI: hiperbolička geometrija, aksioma Lobačevskog, Klajnov model.

1. Euklidov V postulat i pojava neeuklidske geometrije

Euklidska geometrija je geometrijski sistem koji se zasniva na Hilbertovom sistemu aksioma. Apsolutna geometrija je zasnovana na prve četiri grupe Hilbertovog sistema aksioma. Ukoliko sistemu aksioma Apsolutne geometrije pridružimo Euklidov V postulat (Plejferovu aksiomu paralelnosti), dobijamo Euklidsku geometriju. Ali ako sistemu aksioma pridružimo aksiomu Lobačevskog , dobijamo Hiberboličku geometriju (neeuklidsku geometriju). Lobačevski[1] je novi geometrijski sistem izgradio tako što je peti Euklidov peti postulat u Hilbertovom sistemu aksioma zamenio novom aksiomom : [1]

Aksioma Lobačevskog 1.1.: *U ravni, kroz tačku P van prave p, prolaze najmanje dve prave koje ne seku datu pravu. Za tačku P i pravu p kažemo da imaju svojstvo Lobačevskog*.

Pošto je peti postulat nezavisan od aksioma apsolutne geometrije, Lobačevski pristupa problemu indirektno. Kako je aksioma 1.1. protivrečna aksiomi paralelnosti Hilbertovog sistema aksioma, to se geometrijski sistem zasnovan na prve četiri grupe aksioma Hilbertovog sistema aksioma i aksiomi Lobačevskog razlikuje od Euklidske geometrije.

Definicija 1.4.1. Geometrijski sistem zasnovan na prve četiri grupe aksioma Hilbertovog sistema, i aksiomi Lobačevskog 1.1, naziva se *geometrija Lobačevskog* ili *hiperbolička geometrija*. Prostor čije tačke, prave i ravni stoje u međusobnim odnosima koji zadovoljavaju zahteve aksioma prve četiri grupe aksioma Hilbertovog sistema i aksiome Lobačevskog se zove *hiperbolički prostor* i obeležava se sa $\mathcal{H}^3$.

Teorema 1.3. Sledeći iskazi su ekvivalenti aksiome Lobačevskog:

1. Ugao paralelnosti je oštar.
2. Zbir unutrašnjih uglova svakog trougla je manji od π.
3. Zbir unutrašnjih uglova svakog prostog ravnog četverougla je manji od 2π.
4. Zbir unutrašnjih uglova bilo kog pravilnog n-tougla hiperbolične ravni je manji od $(n-2)\pi$.
5. Uglovi na protivosnovici Sakerijevog četverougla su oštri.
6. Postoji prava u ravni oštrog ugla koja je normalna na krak tog ugla, a ne seče njegov drugi krak.
7. Trougao je određen svojim uglovima pa zato ne postoje slični trouglovi.

*vujacicvesna@gmail.com

[1] Nikolaj Ivanovič Lobačevski ruski matematičar (1792–1856).

8. Postoji trougao najveće površine.
9. Skup tačaka jednako udaljenih od prave nije prava.
10. Postoji apsolutna jedinica za merenje dužine... [2]

U apsolutnoj geometriji bilo je moguće dokazati pet stavova o podudarnosti trouglova. Pored pet navedenih stavova, u hiperboličkoj geometriji će važiti još jedan, takozvani *šesti stav o podudarnosti trouglova* kojim se karakteriše hiperbolički prostor.

Teorema 1.4. *Dva trougla su podudarna ako i samo ako su im odgovarajući uglovi medjusobno podudarni.*

Posledica 1.5. *U hiperboličkoj geometriji svaka sličnost je podudarnost.*

Većina teorema hiperboličke geometrije razlikuje se od euklidskih. S druge strane, u malim delovima hiperboličke ravni svi odnosi su približno euklidski.

2. Hiperbolička geometrija

Geometrija Lobačevskog može se posmatrati na hiperboloidu u $\mathcal{R}^3$, zbog čega i dobija naziv hiperbolička geometrija**.** Da bi se uverili u neprotivrečnost planimetrije Lobačevskog neophodno je konstruisati model te geometrije u nekoj teoriji za koju pretpostavljamo da je neprotivrečna.

Najpoznatiji modeli hiperbolične geometrije su Bertrami – Klajneov[2] i Poencareov. [3]
Baratmo sa poljem ($\mathcal{R}$,+, $\cdot$). Takođe $\mathcal{R}^2$ je vektorski prostor nad $\mathcal{R}$.

Definicija 2.1. Neka su x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) $\in \mathcal{R}^2$.
Definišemo skalarni proizvod : $\mathcal{R}^2 \times \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ $\quad (x \circ y) = x_1 y_1 + x_2 y_2$

Definicija 2.2 U unitarnom prostoru $\mathcal{R}^2$ definišimo funkciju $\|\cdot\|$: $\mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ koju nazivamo **norma** koja *preslikava* $\|x\| = \sqrt{(x \circ y)}$.
Uz tu normu ($\mathcal{R}^2$, $\|\cdot\|$) je normirani prostor. [4]
Tražimo ravan koja ima barem dve paralele kroz jednu tačku. Označavaćemo je sa $\mathcal{H}^2$.
Posmatrajmo funkciju f: $\mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}$, f: (x, y) $\to x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$.
Lema 1. f ima svojstva skalarnog proizvoda osim pozitivne definisanosti.

Definicija 2.3. Neka je f bilinearna forma definisana u $\mathcal{R}^3$ na sledeći način:

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3 \quad ,$$

gdje je =(x_1,x_2,x_3) i =(y_1,y_2,y_3).$\boldsymbol{f}$ nazivamo kvaziskalarni proizvod.

Definicija 2.4. Funkciju $\times$: $\mathcal{R}^3 \times \mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$ koja vektorima *u, v* $\in \mathcal{R}^3$ pridružuje vektor *z* $\in \mathcal{R}^3$ takav da je za svaki *x* $\in \mathcal{R}^3$ važi $\boldsymbol{f}$(*x, z*) = det(*x, u, v*).

Definicija 2.5. Za nenula vektor $\vec{v} \in \mathcal{R}^3$ kažemo da je

1. prostorni vektor (p-vektor) ako je $f(\vec{v},\vec{v}) > 0$. Posebno, ako je $f(\vec{v},\vec{v}) = 1$, kažemo da je $\vec{v}$ jedinični prostorni vektor.
2. vremenski vektor (v-vektor) ako je $f(\vec{v},\vec{v}) < 0$. Posebno, ako je $f(\vec{v},\vec{v}) = -1$, kažemo da je $\vec{v}$ jedinični vremenski vektor.
3. svetlosni vektor (s-vektor), ako je $f(\vec{v},\vec{v}) = 0$.

[2] Feliks Kristijan Klajn, nemački matematičar; 1849–1925.

Vektor je normiran s obzirom na formu f ako je on jedinični prostorni ili jedinični vremenski vektor. [5]

Definicija 2.6. Dva vektora i su ortogonalna s obzirom na formu f ako je)=0.

Definicija 2.7. Dužinu vektora $|\vec{v}|$ definišemo kao $|\vec{v}|=$.

Lema2. Sa $\times_f$ označavamo vektorski proizvod vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$ s obzirom na formu f. Taj proizvod je ortogonalan na vektore $\vec{x}$ i $\vec{y}$ s obzirom na formu f.

Lema3. Svaki ortonormirani skup u $\mathcal{R}^3$ je baza.

Lema 4. Ako je {u, v} ortonormirani par, onda je {u × v, u, v} ortonormirana baza.

Može se pokazati da svaka ortonormirana baza obzirom na formu f u $\mathcal{R}^3$ sadrži dva prostorna i jedan vremenski vektor.

Lema 5. Za svaki *p* tj. za svaki *v*- vektor postoji ortonormirana baza koja ga sadrži.

Lema 6. Za svaki $x \in \mathcal{R}^3$ i ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, e_3\}$ važi da je

x = .

Lema 7. Ako su *v* i *w* vektori, onda je $f(v,w)^2 \geq f(v,v)\,f(w,w)$.

Definicija 2.8. Poluprava sa početkom u tački P i vektorom *v* je skup $P + \alpha v$, $\alpha \in \mathcal{R}^+$.

Definicija 2.9. Ugao je unija dve poluprave sa zajedničkim početkom.

Definicija 2.10. Mera ugla određenog jediničnim vektorima *u* i *v* je broj .

3. Model hiperboličke ravni

Definicija 3.1. Hiperbolička ravan je skup

$$\mathcal{H}^2 = \{X \in \mathcal{R}^3 \mid X=(x_1,x_2,x_3),\ x_3 > 0,\ f(r_x,r_x) = -1\},$$

gde je sa r_x označen radijus vektor tačke X.

Napošemo li uslov iz definicije hiperboličke ravni $f(r_x,r_x) = -1$ i uzmemo li u obzir da se posmatraju samo tačke kojima je treća koordinata pozitivan broj, zaključujemo da hiperboličku ravan u $\mathcal{R}^3$ možemo prikazati kao gornju polutku hiperboloida zadanog jednačinom $x_{21}+x_{22}-x_{23}= -1$ kojoj je teme u tački (0,0,1).

Definicija 3.2. Prava sa polom $\vec{e}$ u hiperboličkoj ravni je skup $p=\{X\in \mathcal{H}^2 \mid f(\vec{e},r_x)=0\}$, gde je $\vec{e}=(e_1,e_2,e_3)$ jedinični prostorni vektor. Vektor $\vec{e}$ zovemo vektorom normale prave p. Posmatramo li grafički, prava u hiperboličkoj ravni je presek ravni s vektorom normale $(e_1,e_2,-e_3)$ koja sadrži koordinatni početak koordinatnog sistema i gornje polutke hiperboloida, tj. grana hiperbole u $\mathcal{R}^3$

Teorema 3.3. Neka su P i Q dve različite tačke ravni $\mathcal{H}^2$. Tada postoji jedinstvena prava ravni $\mathcal{H}^2$ koja sadrži tačke P i Q. [6]

Dokaz: Neka su *P* i *Q* različite tačke ravni $\mathcal{H}^2$. Tada je $f(r_P,r_P)= -1$ i $f(r_Q,r_Q)= -1$.

Neka je $p=\{X \in \mathcal{H}^2 \mid f(\vec{e},rx)=0\}$, $f(\vec{e},\vec{e})=1$. Ako tačka *P* pripada pravoj *p*, onda je $f(\vec{e},r_P)=0$. Isto tako, ako tačka *Q* pripada pravoj *p*, onda je $f(\vec{e},r_Q)=0$. Sledi da je $\vec{e}$ proporcionalan vektoru $r_P \times_f r_Q$ i $\vec{e}$ je jedinični vektor. Treba proveriti dali je $\vec{e}$ prostorni vektor. Znamo da je $\{r_P,\vec{e}\}$ ortonormirani par vektora i da je r_P vremenski vektor. Možemo dopuniti taj skup do ortonormirane baze od $\mathcal{R}^3$ (s obzirom na formu f) pa sledi da je $\vec{e}$ prostorni vektor. Jedinstvenost je posledica činjenice da postoji samo jedan jedinični prostorni vektor proporcionalan vektoru $r_P \times_f r_Q$.

Ovom teoremom smo pokazali da uvedeni model hiperboličke ravni zadovoljava prvu aksiomu incidencije.

3.1. Međusobni odnos dve prave

Definicija 3.4. Neka su p i q prave ravni $\mathcal{H}^2$ sa jediničnim vektorima normale (polovima) $\vec{e}$ i $\vec{v}$.

1. Ako je $\vec{e} \times_f \vec{v}$ (v-vektor) vremenski vektor, kažemo da se prave p i q **seku**.
2. Ako je $\vec{e} \times_f \vec{v}$ (s-vektor) svetloliki vektor, kažemo da su prave p i q **paralelne**
3. Ako je $\vec{e} \times_f \vec{v}$ (p-vektor) prostorni vektor, kažemo da su prave p i q **hiperparalelne (ultraparalelne).** [7]

Lema 8. Prave u $\mathcal{H}^2$ se seku ako i samo ako imaju zajedničku tačku.

Teorema 3.5. *Ako su p i q prave ravni $\mathcal{H}^2$ s jediničnim vektorima normale $\vec{e}$ i $\vec{v}$ takvim da je $\vec{e} \times_f \vec{v}$ vremenski vektor, tada postoji jedinstven presek pravih p i q čiji je radijus vektor proporcionalan vektoru $\vec{e} \times_f \vec{v}$.*

Dokaz: Neka su $p=\{x\in \mathcal{H}^2 \mid f(\vec{e}, r_X)=0\}$ i $q=\{x\in \mathcal{H}^2 \mid f(\vec{v}, r_X)=0\}$ prave hiperboličke ravni koje se seku. Tada je $f(\vec{e} \times_f \vec{v}, \vec{e} \times_f \vec{v}) < 0$. Označimo tačku preseka sa S. Tačka S pripada pravoj p pa je $f(\vec{e}, r_S)= 0$. Analogno, tačka S pripada pravoj q pa je $f(\vec{v}, r_S)=0$. Sledi da je r_S proporcionalan vektoru $\vec{e} \times_f \vec{v}$ i jedinični. Kako je $\vec{e} \times_f \vec{v}$ vremenski vektor, zaključujemo da je r_S jedinični vremenski vektor pa je samim time $S\in \mathcal{H}^2$.

Posledica ovog dokaza je i činjenica da ni paralelne ni ultraparalelne prave nemaju ni jednu zajedničku tačku.

Definicija 3.6. Za prave p i q sa odgovarajućim polovima $\vec{e}$ i $\vec{v}$ kažemo da su **normalne** ako su njihovi polovi ortogonalni, tj. ako je $f(\vec{e}, \perp)$. Pišemo $p \perp q$.

Lema 9. Dve prave imaju zajedničku normalu ako i samo ako su hiperparalelne, pri čemu još važi da je ta normala jedinstvena.

Lema 10. Ako je $p \perp q$, onda se p i q seku.

4. Sferna ravanska geometrija

Moguće je posmatrati hiperboličku ravan i kao podskup projektivne ravni. Pre razmatranja Klajnovog modela hiperboličke ravni uvešćemo osnovne pojmove iz projektivne ravanske geometrije. [8]

Sfernu ravansku geometriju možemo proučavati u sledećem modelu.

Definicija 4.1. Neka su $u, v \in \mathcal{R}^3$.

$u \times v$ je vektor $z \in \mathcal{R}^3$, ozn. $u \times v = z$ za koji važi = det $[x, u, v]$.

Lema 4.1.1. = = 0.

Lema 4.1.2. $u \times v = v \times u$.

Lema 4.1.3. $(u \times v) \times w =$.

Lema 4.1.4. $u \times v = 0 \Leftrightarrow \exists\lambda \in \mathcal{R}$ $u = \lambda v$.

Lema 4.1.5. =
Lema 4.1.6. $|u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 -$ ^{2}.
Definicija 4.2. Ortnormirana baza u $\mathcal{R}^3$ je baza u kojoj su vektori međusobno normalni i dužine 1.

Definicija 4.3. Ravan u $\mathcal{E}^3$ je jednoznačno određena smerom i tačkom.

Lema 4.4. Ravan je neprazan netrivijalan skup Π u $\mathcal{E}^3$ koji ima svojstvo da nije prava ni $\mathcal{E}^3$, a za svake dve tačke A i B u Π prava $AB \subset \Pi$.
Lema 4.5. Neka su PQR tri nekolinearne tačke. Tada postoji i jedinstvena je ravan koja ih sadrži. Tu ćemo ravan označavati sa .

Teorema 4.6.. Neka je $P \in \mathcal{E}^3$ i n jedinični vektor.

Onda je skup ravan koja sadrži tačku P.
Definicija 4.7. Vektor n iz prethodne teoreme nazivamo normalom ravni.
Definicija 4.8. Sferna ravan je skup
Tačke su elementi od u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, a prave velike kružnice koje pripadaju toj sferi. Prave su preseci gde je 0 ravan.
Teorema 4.9. Za svaku pravu p u postoje dve tačke $\xi \in$ i $-\xi \in$ za koje važi za svako $P \in p$. U smislu $\mathcal{E}^3$ tačke ξ ,0 i $-\xi$ su kolinearne. Te tačke zovemo polovima i one su jedinstvene (nema drugih polova).

Definicija 4.10. Tačke X i Y sferne ravni su antipodalne ako je $r_X = -r_Y$.
X, 0, i Y su kolinearne u smislu $\mathcal{E}^3$.
Lema 4.11. Neka je p prava u . Ako je $X \in p$, onda je $-X \in p$.
Lema 4.12 Neka su $X, Y \in$, . Tada postoji jedinstvena prava p koja ih sadrži.
Lema 4.13. Svake dve prave u seku se u dve antipodalne tačke.

4.1. Projektivna ravanska geometrija

Kako su svi modeli geometrije Lobačevskog na neki način povezani sa projektivnom geometrijom u sledećem poglavlju napravićemo kratak osvrt u tu geometriju .
Skup $=\{\{X, -X\} \mid X \in \quad\}$ je model projektivne ravni.

Figure projektivne ravni sastoje se od određenog broja tačaka i pravih, dok se figure projektivnog prostora sastoje od određenog broja tačaka, pravih i ravni. [9] **Definicija 4.14.** Bilo koji skup komplanarnih tačaka i pravih zvaćemo ravanskom figurom.
Bilo koji skup tačaka, pravih i ravni u projektivnom prostoru zvaćemo prostornom figurom. **Definicija 4.15.** Tačke projektivne ravni su skupovi $\{X, -X\}$ za $X \in$.
Označimo sa $\boldsymbol{F}$: $\rightarrow$ preslikavanje koje tački sferne ravni pridružuje tačku projektivne ravni definisano sa $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \{\boldsymbol{X}, -\boldsymbol{X}\}$.
Definicija 4.16. Neka je p prava u . Tada je Πp prava u .

Teorema 4.17. Projektivna tačka Πx je na projektivnj pravoj Πp s polom $\Pi\xi$ ako i samo ako je .

Definicija 4.18. Za tačku Πx kažemo da je normalna na tačku Πy (Πx Πy) ako i samo ako je X Y odnosno . Za prave kažemo da su normalne akko su im polovi normalni.

Lema 4.19. U dve prave imaju zajedničku tačku i ona je jedinstvena. U za svake dve tačke postoji jedinstvena prava koja ih sadrži.

Teorema 4.20. Jednačina prave sa polom ξ je .

Definicija 4.21. Neka je { } baza od $\mathcal{R}^3$. Tada za svaki $\in \mathcal{R}^3$ postoji jedinstvena trojka realnih brojeva (x_1,x_2,x_3) takva da je $=x_1 \quad +x_2 \quad +x_3$.

Neka je F(X) tačka ravni , a λ proizvoljan realan broj različit od nule i λ $=u_1 \quad +u_2 \quad +u_3$.

Trojku ( ) zovemo homogenim koordinatama tačke F(X).

Lema 4.22. Ako su $P,Q,R, S \in$, među kojima nema kolinearnih trojki, tada u $\mathcal{R}^3$ postoji baza takva da su homogene koordinate tih tačaka $P = (1, 0, 0)$,$Q = (0, 1, 0)$,$R = (0, 0, 1)$ i $S = (1, 1, 1)$.

Lema 4.23. Ako su x, y homogeni koordinatni vektori dve različite tačke iz , onda je prava kroz te dve tačke skup svih tačaka čiji su homogeni koordinatni vektori oblika $\lambda x + \mu y$, gde su λ, $\mu \in \mathcal{R}$.

Definicija 4.26. Neka je bf proizvoljna bilinearna forma. Ako je { } baza od $\mathcal{R}^3$, tada je

gde su (x_1,x_2,x_3) i (y_1,y_2,y_3) komponente vektora r_X i r_Y, a B=[bij]=[bf( )] matrica kojoj je u i −toj vrsti i j −toj koloni vrednost bf ( ), $i,j \in \{1,2,3\}$.

Definicija 4.27. Neka je bf proizvoljna bilinearna forma. Ako je { } baza od i B=[bij]=[bf( )] , $i,j \in \{1,2,3\}$.

Konika u projektivnoj ravnini je skup { F(X) | =0 }.

Teorema 4.28. Ako je)= $=x_1y_1+x_2y_2-x_3y_3$, tada je B = ,

a konika je skup tačaka { $F(X)$ | =0} = { $F(X)$ | =0 }.

4.2. Klajnov model. Odnos prema euklidskoj ravni

Neka je ={ $X \in$ | < 0} podskup ravni , unutrašnjost konike u ravni .

Tačke za koje je > 0 pripadaju spoljašnjosti konike.

p_∞ je prava projektivne ravni određena jednačinom x_3=0, odnosno svaka tačka koja pripada toj pravoj ima treću koordinatu jednaku 0. [10]

Definicija 4.29. Neka je f: $\mathcal{E}^2 \rightarrow$ funkcija koja svakoj tački (, , 1) ravni $\mathcal{E}^2$ (koju predstavljamo sa ravn1 $x_3=1$ u $\mathcal{E}^3$) pridružuje tačku (x_1,x_2,x_3) ravni sa homogenim koordinatama.

Lema 4.30. Preslikavanje f je bijekcija ako kodomen od f restringiramo na $\backslash p_\infty$.

Lema 4.31. p_∞ označava skup tačaka koje nisu slika ni jedne tačke iz $\mathcal{E}^2$.

Definicija 4.32. Odaberimo pravu $p_\infty = p$, njen pol označimo homogenim koordinatama (0, 0, 1), a p_∞ sa ($x, y,$ 0). Definišemo preslikavanje

$\backslash p_\infty \rightarrow \mathcal{E}^2$ koje $(x_1,x_2,x_3) \rightarrow$ (, , 1).

Lema 4.33. Ako je prava u $\mathcal{E}^2$, onda je p_∞ projektivna prava bez jedne tačke.

Lema 4.34. f je bijekcija skupa pravih(koje nemaju presek sa p_∞) iz bez p_∞ u skup euklidskih pravih.

Teorema 4.35. Slike euklidskih pravih koje su paralelne preko f su delovi pravih u koje se seku u p_∞. Kažemo da se euklidske prave seku u beskonačno dalekoj tački.

Definicija 4.36 Disk možemo posmatrati kao skup tačaka za koje važi < 1 ravni $x_3=1$ u $\mathcal{E}^3$. S obzirom na f, konika { $F(X)$ | =0} projektivne ravni je slika kružnice $\{(x_1,x_2)|$ =1} u $\mathcal{E}^2$.

Lema 4.37. Važe sledeća tvrđenja:

- Uobičajena projekcija (homogene koordinate) Π: $\mathcal{R}^3\backslash\{0\}\rightarrow$ bijektivno preslikava $\mathcal{H}^2$ na
- Za svaku tačku X koja pripada spoljašnjosti konike postoji par jediničnih prostornih vektora $\{r_Y,-r_Y\}$ takav da je $F(Y)=F(-Y)=X$. Obratno, svaki jednični prostorni vektor određuje jednu spoljašnju tačku konike.
- Tačka X pripada koniki ako i samo ako je r_X svetlosni vektor.
- Neka je p prava u ravni $\mathcal{H}^2$. Tada je Πp tetiva konike bez krajnjih tačaka.
- Ako je p prava ravni $\mathcal{H}^2$, onda je Πp sadržana u jedinstvenoj pravoj ravni . Prave ravni koje su sekante konike sadrže sliku pravih ravni $\mathcal{H}^2$.

Na taj način dobili smo disk u (ili $\mathcal{E}^2$) na kojem možemo posmatrati hiperboličku ravansku geometriju.

Hiperboličku geometriju na disku uveo je Klajn pa se zbog toga disk definisan na ovaj način zove *Klajnov disk* [11]

Teorema 4.38. *Svake dve različite tačke Klajnovog modela određuju jedinstvenu pravu Klajnovog modela hiperboličke ravni.*

Dokaz: Tvrđenje iz teoreme proizlazi direktno iz prethodno navedenih tvrđenja i Teoreme 3.3

Lema 4.39. $\mathcal{H}^2 \subseteq \mathcal{E}^2 \subseteq \mathcal{P}^2$

Definicija 4.40 Sa π nazovimo centralnu projekciju $\pi : \mathcal{R}^3 \rightarrow \mathcal{P}^2$ restringiranu na $\mathcal{H}^2$. Nazovimo sa $\mathcal{D}^2$ skup $\{x \in \mathcal{P}^2 : f(x,x) < 0\}$.

Lema 4.41 Važe sledeća tvrđenja:

- Za svaku tačku $T \in \mathcal{P}^2$ izvan $\mathcal{D}^2$ postoji jedinstveni par $\{\xi,-\xi\}$ jediničnih p-vektora takvih da je $\pi\xi = \pi - \xi = T$
- $v \in \mathcal{R}^2$ je s-vektor ako i samo ako je $\pi v \in \partial\mathcal{D}^2$
- $\mathcal{D}^2$ je otvoreni krug u $\mathcal{E}^3$.
- U terminima opisanog modela ako je p prava u $\mathcal{H}^2$ onda je $\pi^{>}p$ otvorena tetiva od otvorenog kruga $\mathcal{D}^2$.

Definicija 4.42 Projektivnu pravu $\tilde{p}$ zovemo nosačem hiperboličke prave p ako je $\pi^{>} p \subseteq \tilde{p}$.

Teorema 4.43. *Neka su p i q prave ravni* $\mathcal{H}^2$ *s jediničnim vektorima normale* $\vec{e}$ *i* $\vec{f}$ i neka su *i* *tetive diska* *koje su slike pravih p i q s obzirom na projekciju* Π. *Neka su p′ i q′ prave u* *koje sadrže* *i* . *Tada važi:*

1. Prave p i q se seku ako i samo ako se p' i q' seku u unutrašnjosti
2. Prave p i q su paralelne ako i samo ako se p' i q' seku na ivici
3. Prave p i q su ultraparalelne ako i samo ako se p' i q' seku u spoljašnjosti od

Dokaz: Svakoj pravoj p ravni $\mathcal{H}^2$ na jedinstven način pridružena je prava u odnosno prava p' u . Dakle, dovoljno je proveriti seku li se prave p' i q' u unutrašnjosti diska. Iz uslova da se prave p i q seku, prema Teoremi 3.5. one se seku u jedinstvenoj tački čiji je radijus vektor proporcionalan vektoru $\vec{e} \times \vec{f}$. Iz Definicije 3.4. znamo da je $f(\vec{e}\times\vec{f}, \vec{e}\times\vec{f}) < 0$, što određuje tačku u unutrašnjosti . Analogno se dokazuju i ostala tvrđenja.

Definicija 4.44. Za dve prave u $\mathcal{E}^2$ kažemo da su konjugovane u odnosu na kružnicu ako je pol na polari druge.

Lema 4.45 Važe sledeća tvrđenja:

- Hiperboličke prave p_1 i p_2 su normalne ako i samo ako su $_1$ i $_2$ konjugovane.
- Činjenica da prave koje se seku ili su paralelne u hiperbolićkoj ravni nemaju zajedničku normalu znaći da prav kroz polove tih tetiva ne prolazi kroz kružnicu.
- U $\mathcal{H}^2$ postoje dve paralele na pravu kroz tačku van prave.
- Ne postoji četvorougao sa četiri prava ugla.
- Postoji petougao sa 5 pravih uglova.
- Pitagorina teorema u $\mathcal{E}^2$: $c^2 = a^2 + b^2$, $\mathcal{S}^2$: $\cos c = \cos a \cos b$, $\mathcal{H}^2$: $\mathrm{ch}\,c = \mathrm{ch}\,a\ \mathrm{ch}\,b$.

5. Zaključak

Svi objekti geometrije Lobačevskog mogu se tako interpretirati unutar euklidske geometrije da su tada svi stavovi geometrije Lobačevskog tačni u okviru euklidske geometrije. Drugim rečima nađen je model geometrije Lobačevskog unutar euklidske geometrije. Tako je dokazano da je geometrija Lobačevskog neprotivrečna pod uslovom da je sama euklidska geometrija neprotivrečna. Time je ujedno dokazana i nezavisnost aksioma paralelnosti od ostalih aksioma, jer je konstruisan model u kojem važe sve aksiome euklidske geometrije, osim aksiome paralelnosti, tj. važi njena negacija.

LITERATURA

Euklid (1957). *Elementi*. Beograd: Srpska akademija nauka i umetnosti.
Lučić, Z. (1997). *Euklidska i hiperbolična geometrija*. Beograd: Total design i Matematički fakultet.
Ryan, P. J. (1991). *Euclidean and non-Euclidean Geometry* – an Analytic Approach. Cambridge Univ. Press, Cambridge
Mintaković, S. (1962). *Aksiomatska izgradnja geometrije*. Zagreb: ŠK.
Vukmirović, S. Modeli geometrije Lobačevskog http://alas.matf.bg.ac.yu/vsrdjan/files/osnove.htm. (10. 05. 2014.)
Anderson (2005). *Hyperbolic Geometry*, London:second edition, Springer-Verlag,
Lopandić, D. (1979). *Geometrija*. Beograd: Naučna knjiga.
Prvanović, M. (1971). *Neeuklidske geometrije*. Novi Sad: Savez studenata Prirodno-matematičkog fakulteta.
http://www.doiserbia.nb.rs/(1.12.2013.)
http://e.math.hr/category/klju-ne-rije-i/hiperboli-ka-ravnina 13.5.2014.
http://mathbiv.wordpress.com/2013/05/20/matematicka-knjiga-sa-najvecim-brojem-izdanja/ 14.05.2014.

Vesna Vujačić

HYPERBOLIC GEOMETRY IN KLEIN'S MODEL

Summary

Hyperbolic geometry (also called Lobachevskian geometry) is a non-Euclidean geometry, meaning that the parallel postulate of Euclidean geometry is replaced. In order to make sure that it is uncontroversial, it is necessary to construct this geometry model as a part of a theory for which we assume that it is uncontroversial. The best known models of hyperbolic geometry are Klein and Poincaré's model.

Key words: hyperbolic geometry, Lobachevsky proposition, Klein model.